第五章：信号采样与重建

- 信号分类
- 连续时间域和离散时间域信号频率
- 模拟信号的采样
- 信号采样的频域表示
- 采样定理
- 带限信号的重建
- ZOH波形重建
- 带通信号的采样
- 连续幅度信号的量化和编码
- 量化噪声

信号分类

- 数字信号处理需要信号采样和重建

- **Deterministic vs. Random Signals**
- **Continuous-Time vs. Discrete-Time Signals**
- **Continuous-Value vs. Discrete-Value Signals**
- **Analog Signals vs. Digital Signals**

连续时间域和离散时间域频率的概念

- 连续时间正弦波

$$x_{at} = A\cos(\Omega t + \theta) \qquad -\infty < t < \infty$$

$$\Omega = 2\pi f$$

Ω角频率，f 频率

$$x_{at} = A\cos(2\pi f \bullet t + \theta) = \frac{A}{2}e^{j(\Omega t+\theta)} + \frac{A}{2}e^{-j(\Omega t+\theta)}$$

即余弦实函数可以看成是正频率逆时针旋转和负频率顺时针旋转信号之和

- 离散正弦信号特点

N看成是离散时间，n个周期

$$x(n) = A\cos(\omega \bullet n + \theta) \qquad -\infty < n < \infty$$

每个采样间隔内所转过的角度

$$x(n) = A\cos(2\pi f \bullet n + \theta)$$

每个采样间隔内所转过的Cycle数

特点：

— 离散时间正弦函数仅当它的频率f是有理数时（即可以表示为两个整数之比），才是周期的。

$$x(n+N)=x(n)$$

to all n, N称为基本周期fundamental period

$$\cos[2\pi f_0(n+N)+\theta]=\cos(2\pi f_0+\theta)$$

$$\Longrightarrow \quad 2\pi f_0 N=2k\pi \quad \Longrightarrow \quad f_0=\frac{k}{N}$$

— 频率相差2π整数倍的离散正弦信号是相同的

$$\because \cos[(\omega_0+2\pi)n+\theta]=\cos(\omega_0 n+\theta)$$

$$x_k(n)=A\cos(\omega_k \bullet n+\theta)=x_0(n) \qquad k=0,1,2,3...$$

$$where \rightarrow \omega_k=\omega_0+2k\pi \qquad -\pi<\omega_0<+\pi$$

即：频率在 $-\pi<\omega<+\pi$ 或 $-\frac{1}{2}<f<+\frac{1}{2}$ 范围内不同的两个正弦波是不同的，或者说此范围内的正弦波是唯一的。所有频率在 $|\omega|>\pi$ 或 $|f|>1/2$ 离散正弦信号均和 $|\omega|<\pi$ 内的函数相同。因此，$|\omega|>\pi$ 的正弦信号叫做是 $|\omega|\le\pi$ 内正弦信号的混叠。

模拟信号的采样

- 采样： $x(n) = x_a(nT) \qquad -\infty < n < \infty$

X(n)是从模拟信号Xa(t)中每隔T秒抽取采样一次的值。
T ---- 采样周期或采样间隔
Fs=1/T ---- 称为采样频率， Ωs = 2π/T ，称为采样角频率

$$x_a = A\cos[2\pi F \cdot t + \theta] = A\cos[\Omega \cdot t + \theta]$$

$$x_a(nT) = x(n) = A\cos[2\pi F \cdot nT + \theta] = A\cos[\frac{2\pi nF}{F_S} + \theta]$$

和前面的离散正弦信号表示相比较：

$$x(n) = A\cos(2\pi f \bullet n + \theta) = A\cos(\omega n + \theta)$$

有：

$$\begin{cases} f = \dfrac{F}{F_S} \\ \omega = \Omega \cdot T \end{cases}$$

模拟信号频率和角频率

各自的取值范围：

$$-\infty < F < \infty \qquad \Rightarrow \qquad -1/2 < f < 1/2$$

$$-\infty < \Omega < \infty \qquad\qquad -1/2 < \omega < 1/2$$

得到：

$$-\frac{1}{2T} = -\frac{F_S}{2} \le F \le \frac{F_S}{2} = \frac{1}{2T}$$

$$-\frac{\pi}{T} = -\pi F_S \le \Omega \le \pi F_S = \frac{\pi}{T}$$

结论：模拟信号与之对应的离散采样信号的基本区别是频率变量取值范围的变化，周期采样将连续信号的无限频率范围映射到离散域的有限频率范围。又：

$$F_{\max} = \frac{F_S}{2} = \frac{1}{2T}$$

$$\Omega_{\max} = \pi F_S = \frac{\pi}{T}$$

即在该频率范围内的模拟信号才可以被离散采样后的信号唯一确定

定义：$f_0 = F_0 / F_S$ 且：$-F_S/2 \le F_0 \le F_S/2$

$-1/2 \le f_0 \le 1/2$

对于高于**Fs/2**的信号采样：

$$x_{at} = A\cos(2\pi F_k t + \theta)$$

$$F_k = F_0 + kF_S \qquad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots$$

由于**Fk**在基本频率之外，

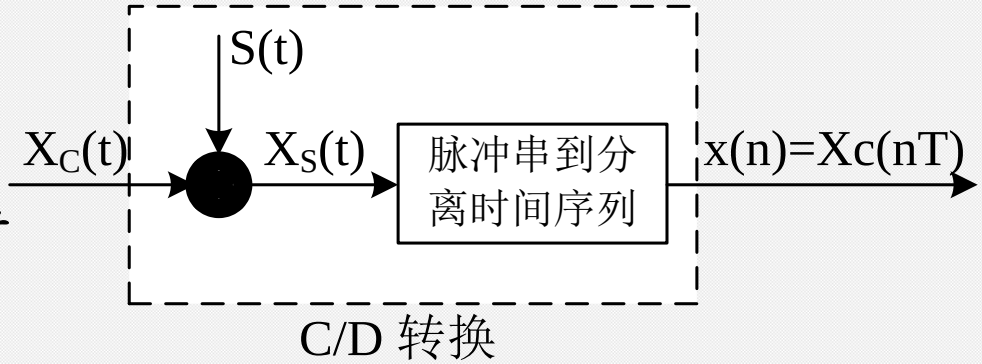
$$x(n) = x_a(nT) = A\cos(2\pi \frac{F_0 + kF_S}{F_S} \times n + \theta)$$

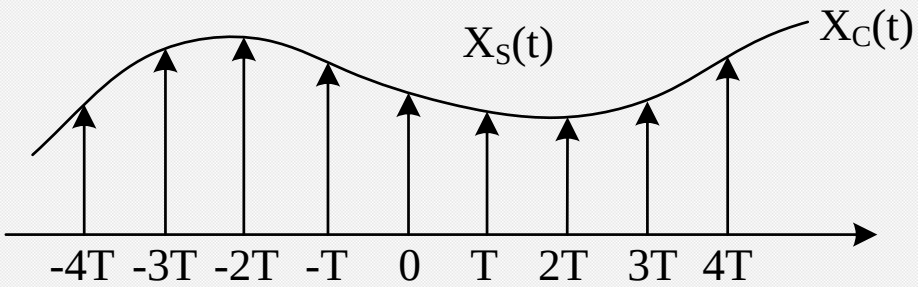
$$= A\cos(2\pi n F_0 / F_S + \theta + 2\pi kn) = A\cos(2\pi n f_0 + \theta)$$

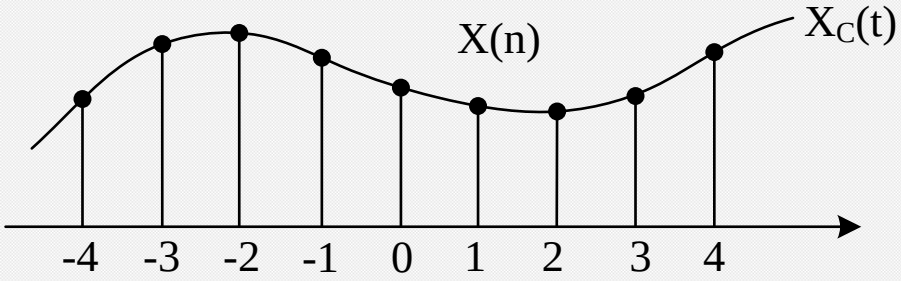
它和基本频率**F0**的采样结果一样，即 $F_k = F_0 + kF_S$ 和 F_0 混叠，无法区分。

采样过程的频率表示

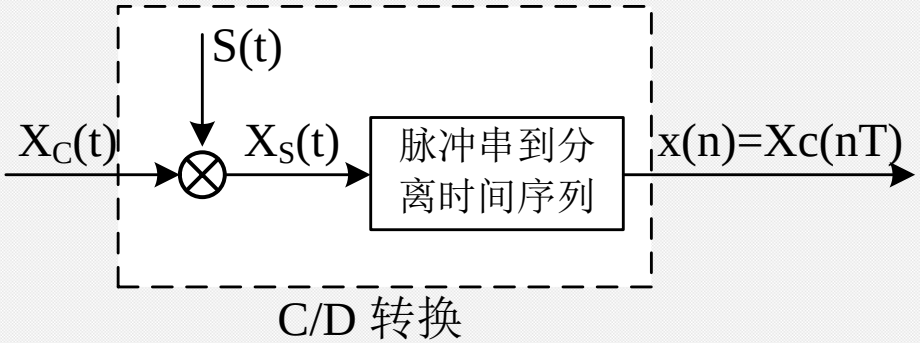
- 采样看成右图过程：
  - —T为采样周期，Fs=1/T
  - —X(n)和Xs(t)的区别，后者表示在除T整数倍处均为0的连续时间信号。X(n)没有显式地说明采样周期，它仅是以n为索引的序列。







- **Xc(t)到Xs(t)的变换是周期脉冲序列S(t)的调制：**



$$S(t)=\sum_{-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$

$\delta(t)$ 是单位冲激函数或Dirac Delta 函数

$$x_s(t)=s(t)x_c(t)=x_c(t)\sum_{-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)=\sum_{-\infty}^{\infty}x_c(nT)\delta(t-nT)$$

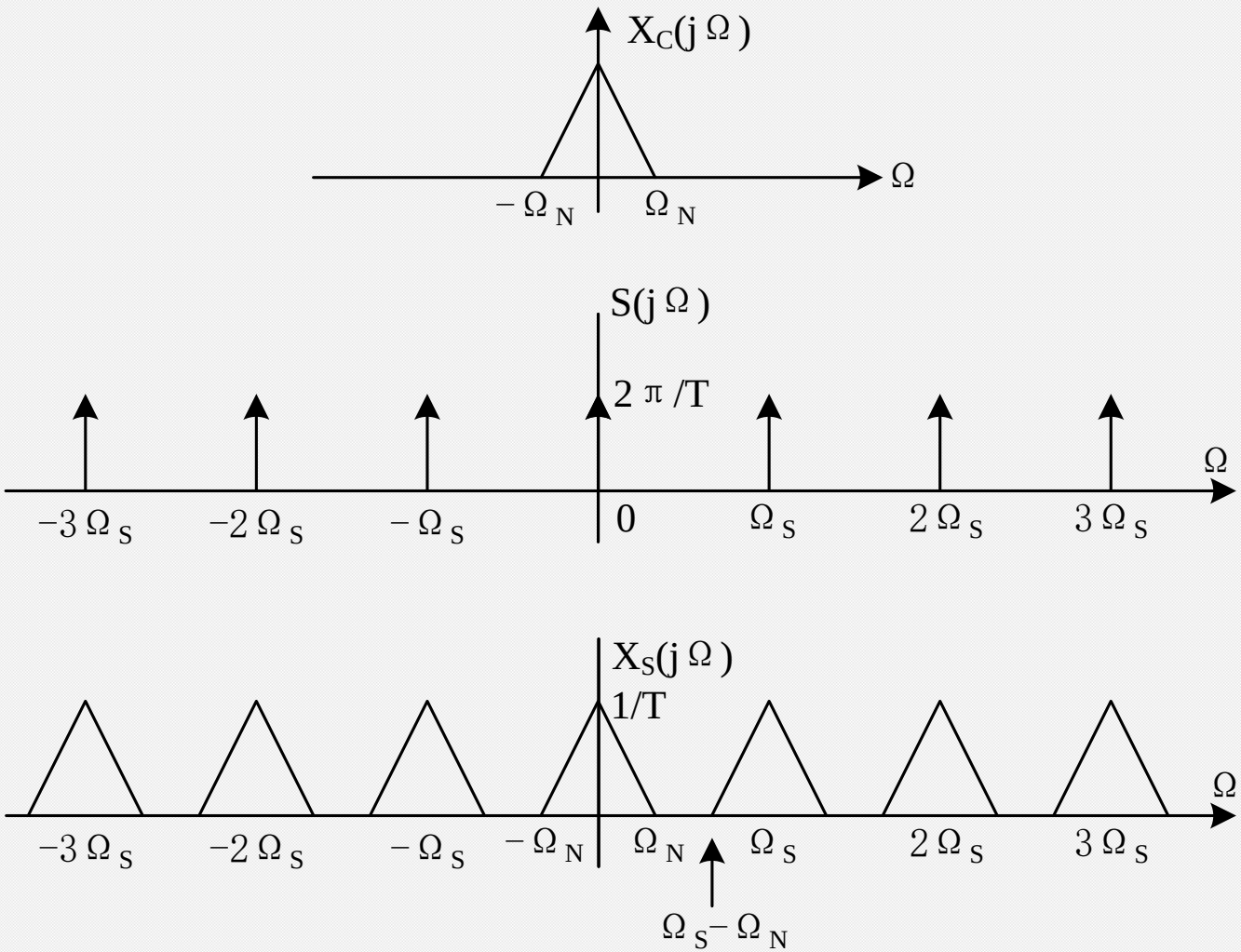
(冲激函数筛选特性)

Xs(t)的付氏变换是s(t)和Xc(t)付氏变换的卷积：

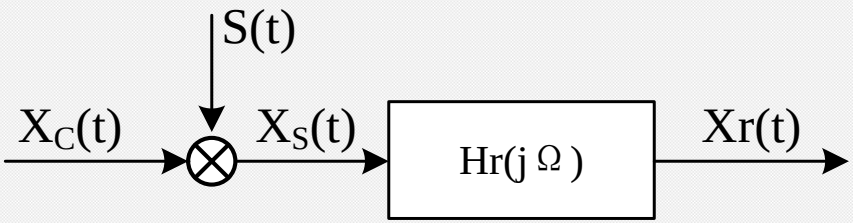
$$S(j\Omega)=\frac{2\pi}{T}\sum_{-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-k\Omega_S)\qquad \Omega_S=2\pi/T$$

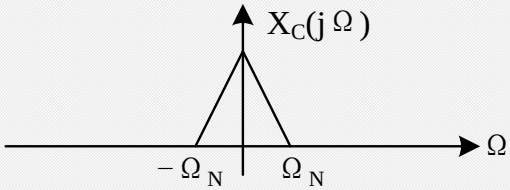
$$X_S(j\Omega)=\frac{1}{2\pi}X_C(j\Omega)*S(j\Omega)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_C[j(\Omega-k\Omega_S)]$$

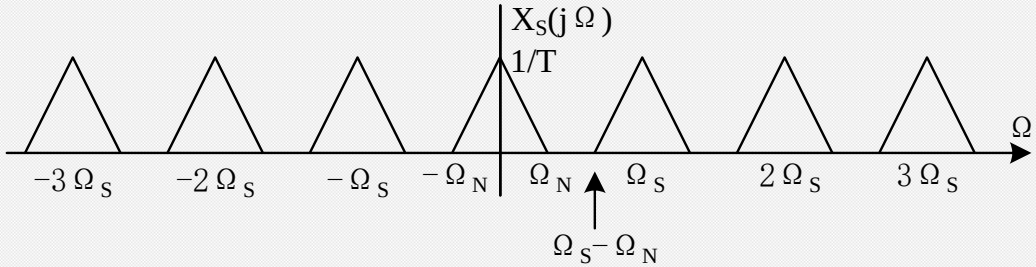
上式是通过冲激串调制后的输出与输入间的关系

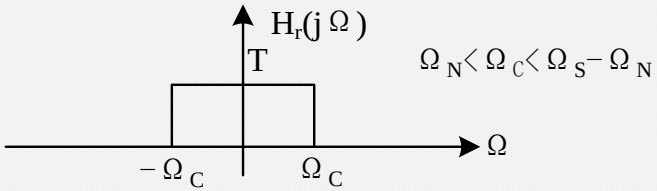


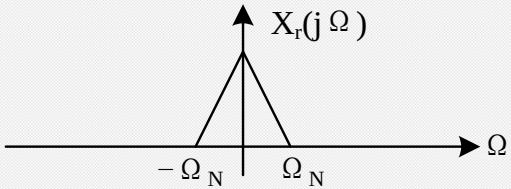
显然，当 $\Omega_S-\Omega_N>\Omega_N$ 或 $\Omega_S>2\Omega_N$ 时，$X_C(j\Omega)$ 不会混叠，这种情况下使用低通滤波器可以恢复原信号：











$$X_r(j\Omega) = H_r(j\Omega)X_S(j\Omega)$$

如果理想滤波器增益为T，截断频率满足：

$$\Omega_N < \Omega_C < (\Omega_S - \Omega_N)$$

则：

$$X_r(j\Omega) = X_C(j\Omega)$$

采样定理（Nyquist）

- 对于带限信号： $X_C(j\Omega)=0$ **for** $|\Omega|>\Omega_N$

  如果采样频率 $\Omega_S=\dfrac{2\pi}{T}\geq 2\Omega_N$

  则 $X_C(t)$ 可以被它的采样序列

$$x[n]=x_C(nT), n=0,\pm 1,\pm 2....$$

  确定。

  Ω_N 称为**Nyquist**频率， $2\Omega_N$ 称为**Nyquist Rate**

带限信号的重建

- 上述分析可知，满足采样定理的采样序列 $x[n]$，通过理想低通滤波器可以恢复原信号 $X_C(t)$。设理想低通滤波器 $H_r(j\Omega)$ 的冲激响应为 $h_r(t)$，则滤波器输出为：

$$x_r(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]h_r(t-nT) \qquad \text{（卷积表达式）}$$

- 设定滤波器的截止频率：$\Omega_C=\Omega_S/2=\pi/T$

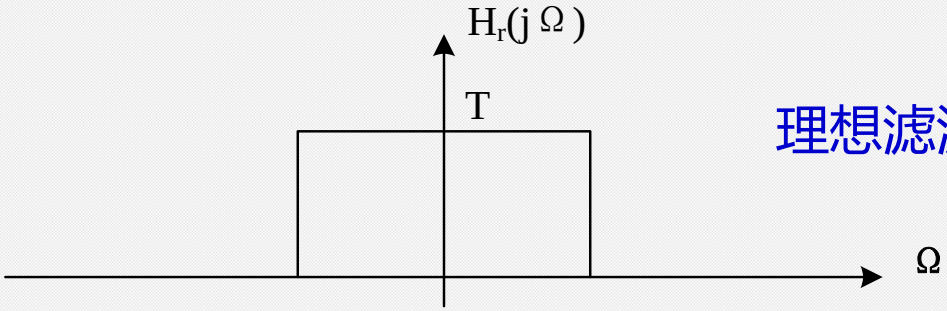
则：

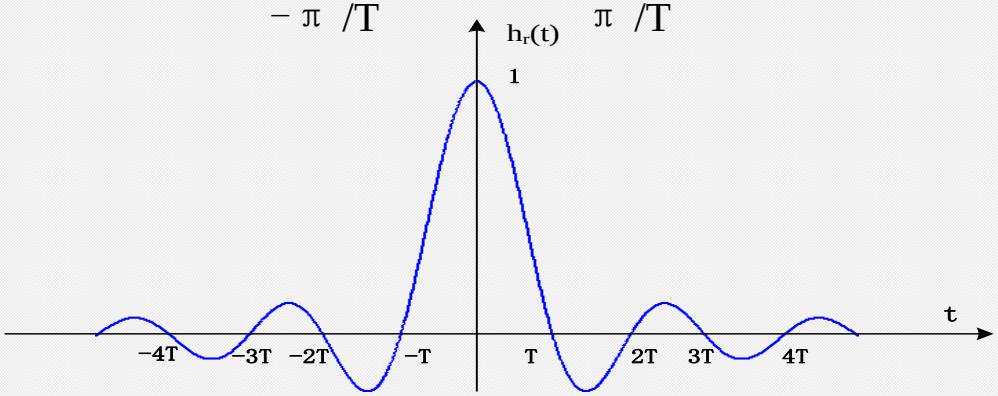
$$h_r(t)=\frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}$$

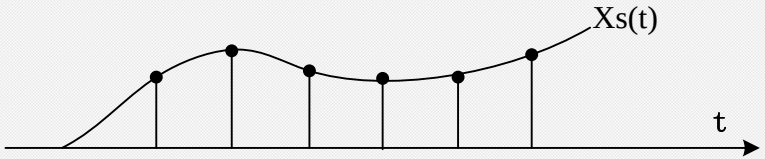
$$x_r(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\frac{\sin[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T}$$

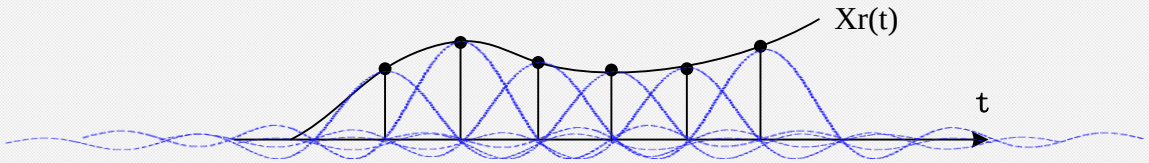
- 信号的理想重建过程如下图

理想滤波器 $H_r(j\Omega)$









ZOH波形重建

- 仙农重建器是个非因果系统，重建任何一点波形的值需要知道整个系列的值，因此仙农重建器只具有理论意义。在实时信号处理中，必须使用因果重建器。

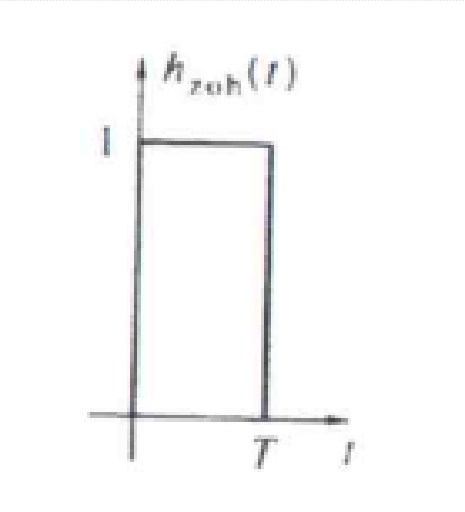
  如果用h（t）来表示重建器的脉冲响应，则重建公式应为：

$$\hat{x}(t)=\sum_{n=-\infty}^{[t/T]} x(nT)h(t-nT)$$

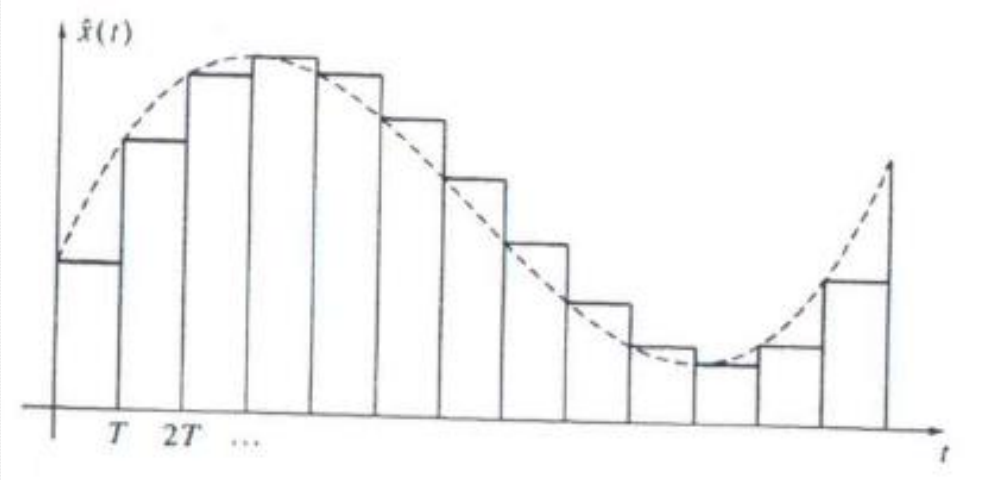
  h(t)的选择使 $\hat{x}(t)$ 接近 $x(t)$ 。求和的上限反映了因果系统的要求，[t/T]表示小于t/T的最大整数

- 实现这种逼近重建的一种简单设备是**zero-order hold (ZOH)**电路，**ZOH**的脉冲响应为

$$h_{zoh}(t)=\begin{cases}1, & 0\le t<T,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$



ZOH时域响应

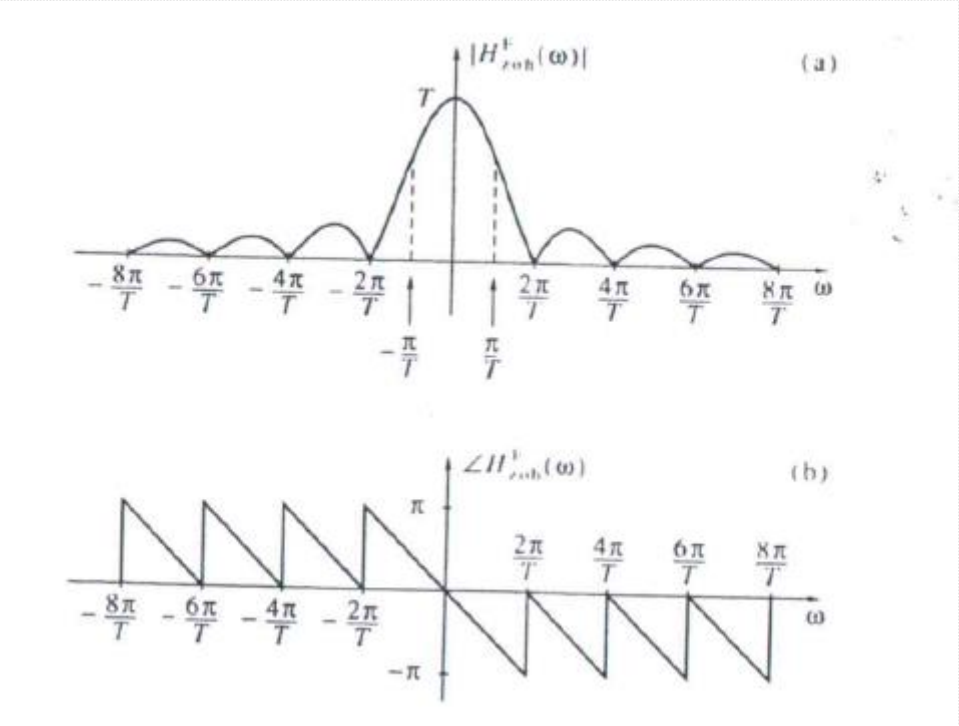


ZOH重建波形

从频率上看ZOH重建器：仙农重建器是一个在 $-\pi/T \le \Omega \le \pi/T$ 范围内理想的长方形，且具有零相位。但hzoh（t）的频率域表示为：

$$H_{zoh}(j\Omega) = \int_0^T e^{-j\Omega t} dt = \frac{1-e^{-j\Omega T}}{j\Omega} = T\sin c(\frac{\Omega T}{2\pi}) e^{-j0.5\Omega T}$$

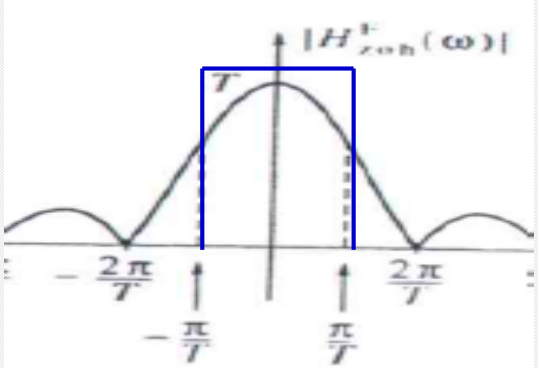
幅频和相频特性示于下图

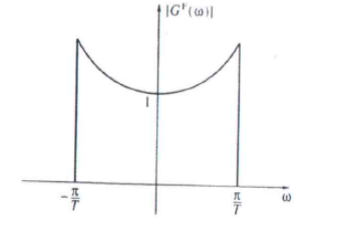


1. 低频部的幅度响应不平坦，逐渐衰减，在$\Omega=\pm 2\pi/T$处衰减至0，而不是 $\Omega=\pm\pi/T$

2. 幅频响应在高频部分一直无限振荡，因此重建器中有不希望的高频能量，这对应时域中阶梯信号形式

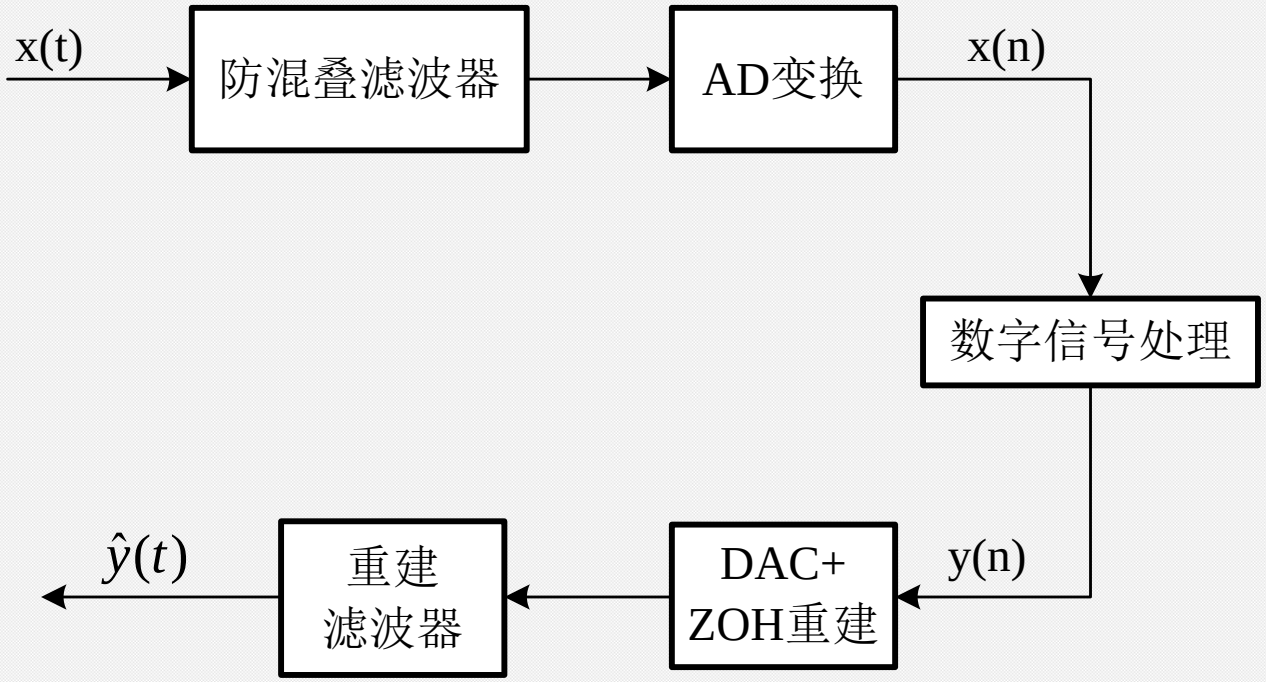
3. 相位不为0，但是线性的，斜率-0.5T。





- **ZOH重建不希望有的成分可以通过一个低通模拟滤波器解决，注意滤波器的理想幅度响应如左图，它是|Hzoh（Ω）|的倒数。**

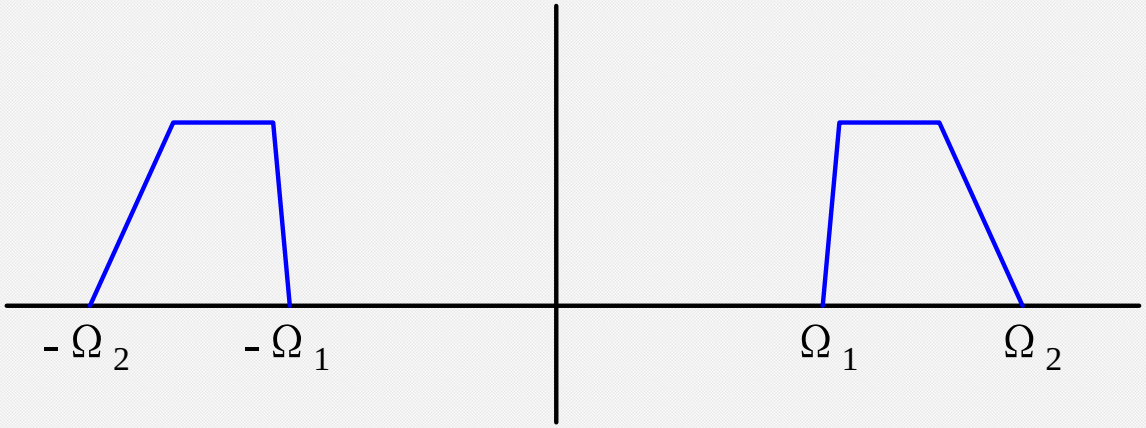
信号采集和重建框图



带通信号的采样

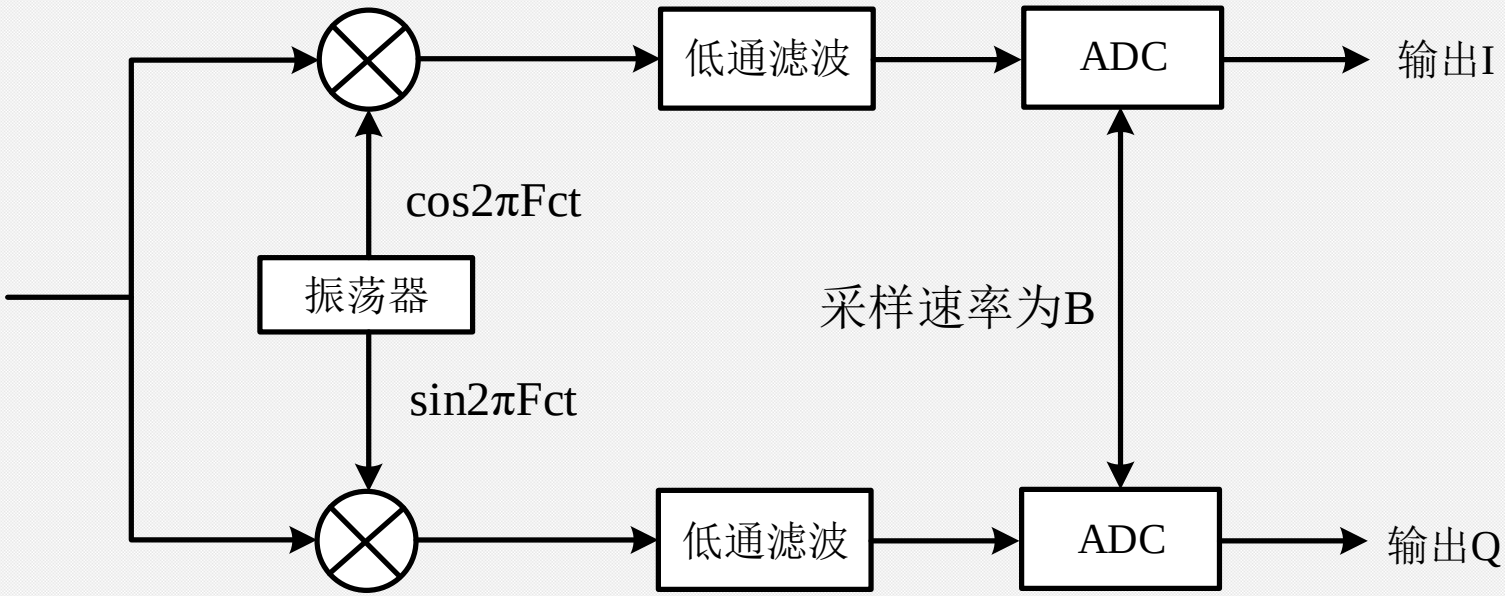
- **Band Pass信号**

—如果存在 $0 \prec \Omega_1 \prec \Omega_2$，信号X(t)的傅里叶变换 $X(j\Omega)=0$ for $|\Omega| \le \Omega_1$ and for $|\Omega| \ge \Omega_2$，称为带通信号。



带宽定义为 $B=\Omega_2-\Omega_1$ 或 $B=(\Omega_2-\Omega_1)/2\pi$

- 窄带信号采样可以有三种方案
  - 根据前面的采样定理，直接用大于 $2\Omega_2$ 的采样频率采样信号
  - 采用复移频方法将带通信号移至以0为中心的频段后采样



—利用带通信号与离散采样频率的特性实现采样

首先考虑 Ω_2 是带宽B整数倍的情况，即 $\Omega_2 = L(\Omega_2 - \Omega_1) = LB$

用于窄带信号采样的ADC，虽然采样频率低了，但ADC的输入信号模拟带宽必须大于 Ω_2 ，同时由于ADC采样和保持电路原理上有平均效果，因此要求采样时间要远小于 Ω_2 的周期。否则将产生严重畸变，故这类ADC比同档采样率的ADC（用于低频）要贵的多。

对于窄带采样信号，很少有要求进行波形重建的，如果有要求的话，作法是选用一理想的带通滤波器

注意：对于 Ω_2 不是 $\Omega_2 - \Omega_1$ 整数倍的情况，同样可以向右端扩展频率来实现采样

连续幅度信号的量化与编码

- **量化：** 用有限位数表示离散时间连续幅度信号值的转化过程
- **量化误差或量化噪声：** 由有限位量化值表示的幅度和连续幅度值的误差。$x_q[n]=Q[x(n)]$ 表示采样量化后的采样值，量化误差表示为：

$$e_q(n)=x_q(n)-x(n)$$

量化后的分离时间信号称为数字信号，在数字信号中允许的值称为量化电平值，两个相邻量化电平之间的差称为量化步长或分辨率（**Δ**）

量化误差的取舍有两种：

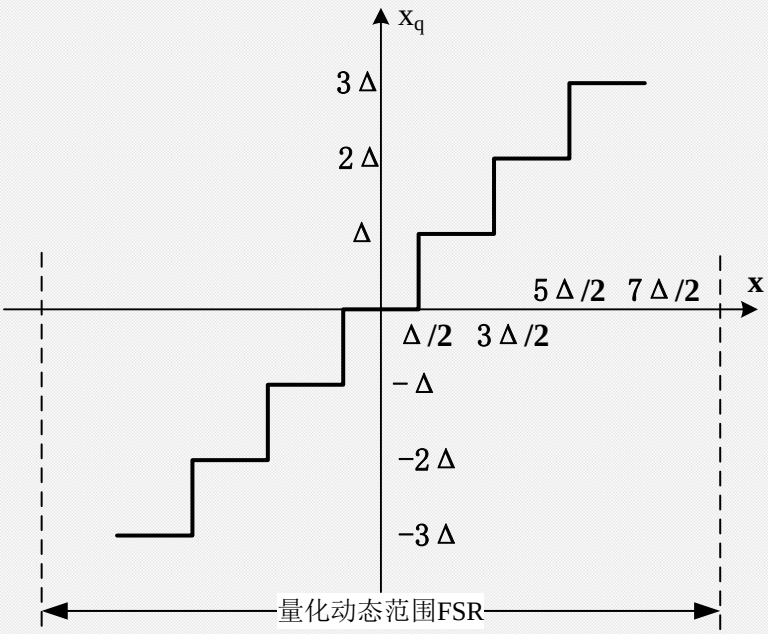
1. the rounding quantizer: 采样值取最近的量化电平值

$$-\Delta/2\le e_q(n)\le\Delta/2$$

2. truncation: 取比采样值低的量化电平值。

如果用**Xmax**和**Xmin**表示**Xq(n)**中的最大值和最小值，**L**表示量化电平数，则 $\Delta=(x_{\max}-x_{\min})/(L-1)$；$x_{\max}-x_{\min}$ 称为动态范围

- **AD变换器的基本任务是将连续幅度转化为数字码字，即量化与编码，量化是非线性的，或说是不可逆的，它将t=nT时刻的给定幅度量化映射为有限字长的一个编码，常用的编码方式有：**



	Sign+ Magnitude	Two's Complement	Offset Binary	One's Complement
3	011	011	111	011
2	010	010	110	010
1	001	001	101	001
0	000	000	100	000
-1	101	111	011	110
-2	110	110	010	101
-3	111	101	001	100

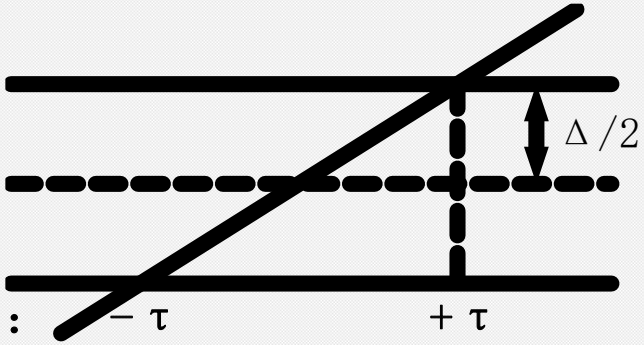
减去100

负数+1

量化噪声

- 正弦信号的量化：如果采样频率满足采样定理，则量化是A/D转换过程的唯一误差来源。

在两个量化电平之间，正弦信号可以看成是线性的。



$$e_q(t) = x_a(t) - x_q(t)$$

用τ表示Xa(t)在量化电平之间的时间，则误差功率为：

$$P_q = \frac{1}{2\pi}\int_{-\tau}^{\tau} e_q^2(t)dt = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} e_q^2(t)dt$$

因为 $e_q(t) = (\Delta/2\tau)t \quad -\tau \le t \le \tau$

$$P_q = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}(\frac{\Delta}{2\tau})^2 t^2 dt = \frac{\Delta^2}{12}$$

设信号幅度为A，b bit量化，则 $\Delta = 2A/2^b$ ， $p_q = \frac{A^2/3}{2^{2b}}$

另一方面，信号的平均功率为：

$$P_x = \frac{1}{T_P}\int_0^{T_P}(A\cos\Omega_0 t)^2 dt = \frac{A^2}{2}$$

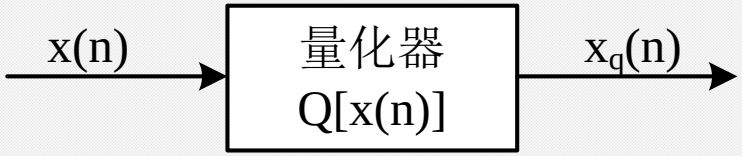
信噪比：

$$SNR = \frac{P_x}{P_q} = \frac{3}{2}\cdot 2^{2b}$$

用分贝表示： $SNR(dB) = 10\log_{10} SNR = 1.76 + 6.02b$

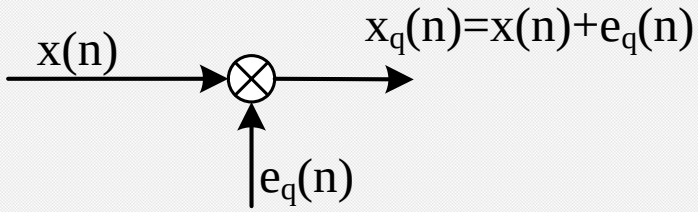
表明：量化字长每增加一位，信噪比增大6dB

量化信噪比的一般表示



假设的量化噪声特点：

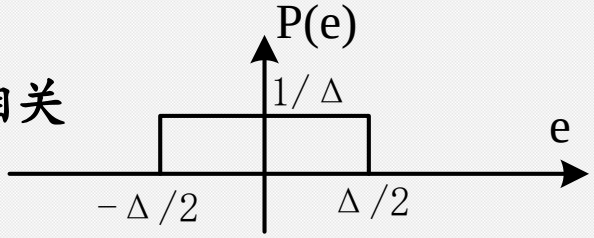
1. $e_q(n)$ 在 $-\Delta/2 < e_q(n) < \Delta/2$ 范围内均匀分布。



2. 是平稳白噪声序列，即 $e_q(n)$和$e_q(m)$ 对 $m \neq n$ 是不相关的

3. 噪声序列 $\{e_q(n)\}$ 和信号序列x(n)不相关

4. $\{e_q(n)\}$ 平均值为0



量化噪声的能量为：

$$P_n = \sigma_e^2 = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e^2 p(e) de = \frac{1}{\Delta}\int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e^2 de = \frac{\Delta^2}{12}$$

如果量化输出字长为b，量化范围为R，σ_x 是输入信号的RMS值

则：

$$\Delta = \frac{R}{2^b}$$

$$
\begin{aligned}
SNR &= 10\log\frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2} = 20\log\frac{\sigma_x}{\sigma_e} \\
&= 20\log_{10}\frac{\sigma_x\sqrt{12}}{\Delta} = 20\log_{10}\frac{\sigma_x\cdot\sqrt{12}\cdot 2^b}{R} \\
&= 6.02b + 20\log_{10}\sqrt{12} - 20\log_{10}\frac{R}{\sigma_x} \\
&= 6.02b + 10.8 - 20\log_{10}\frac{R}{\sigma_x}
\end{aligned}
$$

SNR和输入信号的RMS值密切相关。对于 $\sigma_x = R$ 有 $SNR = 6.02 + 10.8$

这是最理想情况，实际情况都要比这低。